

テニス・ボールに働く力

飛んでいるテニス・ボールには**重力** (weight), **抗力** (drag), **揚力** (lift) の三つの力が作用します。これらの力がどのくらいの大きさなのか調べてみましょう。

1. 重力

ボールを持ち上げておいて手を離すと、地球に引っ張られてコート面に落ちますね。このときボールに働いている力が重力です。重力は次の式で計算できます。

$$F_w = m \cdot g \quad (1)$$

ここで、 F_w : 重力, m : ボールの質量, g : 重力の加速度です。

2. 抗力 (空気抵抗)

抗力は空気から受ける抵抗です。強い風に向かって進もうとすると風に押し戻されますよね。この力で。ボールが飛ぶのを止めようとする方向に働きます。抗力は次の式で計算できます。

$$F_d = \frac{1}{2} C_d \rho V^2 A \quad (2)$$

ここで、 F_d : 抗力, C_d : 抗力係数 (空気抵抗係数), ρ : 空気密度, V : ボールの速度, A : 前面投影面積です。抗力は式(2)のようにボールの速度の二乗に比例しますから、ボールが速くなると抗力はどんどん大きくなります。

3. 揚力

重力はボールを秤にのせれば測れますし、抗力は自分で走ってみると風の抵抗を受けることを実感できるので分かりやすいですね。

でも揚力はちょっと理屈をこねる必要があります。テニス・ボールに作用する揚力は、航空機の翼に作用する揚力と類似の原理によっています。揚力について少し詳しく見てみましょう。

結論としては、「**ボールが回転 (スピン) して飛ぶことによるマグナス効果 (Magnus Effect) によって揚力が発生する**」のです。回転 (スピン) しないボールには揚力は働きません。

図 1 を見てください。(a)はフラット (回転なし) のボール、(b)はバックスピンのボール、(c)はトップスピンのボールを示しています。

(b)のバックスピンのボールに注目してください。ボールは左に飛んでいます。相対的にボールの周りの空気は右に向かって流れています。この空気の流れの速度を V_1 とします (無風状態とすると V_1 はボールの飛行速度に等しくなります)。バックスピンのボールは飛ぶ方向と反対方向に回転しています。ボールの回転による外周速度を V_2 とします。ボールが回転することで、ボールの表面近くの空気もボールといっしょに回転します。したがって、ボール上部の空気速度は $(V_1 + V_2)$ になります。一方、ボール下部の空気速度は $(V_1 - V_2)$ になります。

ここで、高校の物理で勉強した「ベルヌーイの定理 (Bernoulli's Law)」を思い出してください。ベルヌーイの定理は、「**流体の速度が増加すると圧力が下がる**」とっています。バックスピンのボールではボール上部の空気速度がボール下部の空気速度より大きくなるのでボール上部の圧力が下がり、下部の圧力でボールを押し上げる方向に力（揚力）が働くことになります。これが**マグナス効果**です。揚力が働くためバックスピンのボールは落ちにくくなります。

(c)のトップスピンのボールでは回転（スピン）がバックスピンとは逆なので、逆の方向に揚力が働きます。したがって、トップスピンのボールは落ちやすいわけです。

(a)のフラット（回転なし）のボールではボールの上下で空気速度は同じですから揚力は働きません。

実際にはボールの回転する面は傾いていたりしますので、揚力によってボールがカーブしたりシュートしたりすることになります。また、ボール表面のメルトンや目地の影響によって揚力の方向が時々刻々変化したりするものと考えられます。

このマグナス効果は野球，サッカー，ゴルフ等ボールを使う競技では同様のことが起こっています。

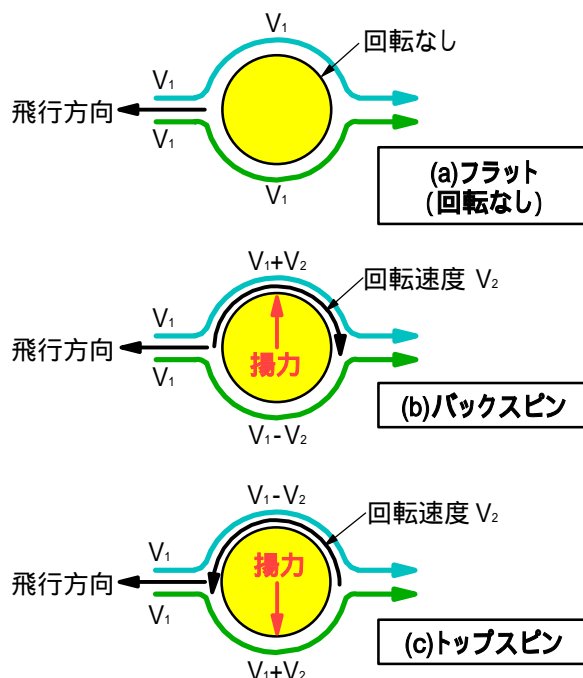


図1 テニス・ボールに作用する揚力

ここで、**ベルヌーイの定理**をもう少し詳しく見てみましょう。「**流れに沿って、流体の速度エネルギー，圧力エネルギー，位置エネルギーの和はいたるところで一定である。**」というのがベルヌーイの定理です。式で表すと次のようになります。

$$\frac{V^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gZ = \text{const.} (\text{一定}) \quad (3)$$

ここで、 V ：流体の速度， P ：流体の圧力， ρ ：流体の密度， g ：重力の加速度， Z ：高さです。

バックスピンのボールの上下についてベルヌーイの定理を当てはめると次のようになります。

$$\frac{(V_1 + V_2)^2}{2} + \frac{P_U}{\rho} + gZ_U = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2} + \frac{P_B}{\rho} + gZ_B \quad (4)$$

ここで、 V_1 ：ボールの飛行速度、 V_2 ：ボールの外周速度（スピン）、 P_U ：ボール上部の圧力、 Z_U ：ボール上部の高さ、 P_B ：ボール下部の圧力、 Z_B ：ボール下部の高さです。

式(4)を変形すると次のようになります。

$$P_B - P_U = \rho[2V_1V_2 + g(Z_U - Z_B)] \quad (\text{バックスピンの場合}) \quad (5)$$

同様にトップスピンの場合は次のようになります。

$$P_B - P_U = \rho[-2V_1V_2 + g(Z_U - Z_B)] \quad (\text{トップスピンの場合}) \quad (6)$$

ボールの回転速度を N 、ボールの直径を d として、 $(Z_U - Z_B)$ は高々ボールの直径であるので無視すると、式(5)と式(6)は次のようになります。

$$P_B - P_U = 2\pi\rho d V_1 N \quad (\text{バックスピンの場合}) \quad (7)$$

$$P_B - P_U = -2\pi\rho d V_1 N \quad (\text{トップスピンの場合}) \quad (8)$$

この圧力差に圧力が作用する面積を掛ければ揚力の大きさが計算できるはずですが、実はそう簡単にはいかないようです。実際にはボールの周囲の空気の流れがいろいろ複雑になっていて、**クッタ・ジュウコウスキー (Kutta-Joukowski) の法則**というものを持ち出して次のように表されています。【参考文献 1】

$$F_L = \frac{1}{8} \pi^2 \rho d^3 V_1 N \quad (9)$$

ここで、 F_L ：揚力です。式(9)でバックスピンの場合は回転速度 N は正、トップスピンの場合は負とします。式(7)、式(8)と式(9)を比較すると、圧力が作用する面積は、ボールの断面積（直径 d ）の $\frac{1}{4}$ に相当するようですね。感覚的にはベルヌーイの定理から揚力が理解できますよね。

4. 実際の問題についての試算

では、飛んでいるボールに作用する重力、抗力、揚力を具体的に試算してみましょう。

重力

ルールブック第二部・規則 3・(b)の規定からボールの重さは 56.0 g ~ 59.4 g となっていますので、中央の値をとって質量 $m = 5.89 \times 10^{-5} \text{ kgf} \cdot \text{s}^2 / \text{cm}$ (57.7 g) とします。

g は重力の加速度ですから $g = 980 \text{ cm} / \text{s}^2$ です。

したがって、式(1)から重力は次のようになります。計算しなくても 57.7g ですよね。

$$F_w = m \cdot g = 5.89 \times 10^{-5} \times 980 = 0.0577 \text{ kgf} \quad (10)$$

抗力

この抗力係数が結構厄介なのです。実は抗力係数は**レイノルズ数(Reynolds' number)**の関数なのです。まず、レイノルズ数は次の式で表されます。

$$R_e = \frac{d \cdot V}{\nu} \quad (11)$$

ここで、 R_e ：レイノルズ数， d ：ボールの直径， V ：ボールの速度， ν ：空気の粘度です。

ルールブックの第二部・付則 1・(4)からボールの直径は 6.541 cm ~ 6.858 cm【BT1(Fast), BT2(Medium) の場合】ですから、中央の値を使ってボールの直径は $d = 6.7 \text{ cm}$ とします。

したがって、前面投影面積は $A = \frac{\pi}{4} \times 6.7^2 = 35.26 \text{ cm}^2$ となります。

空気の粘度は理科年表から、大気圧下で 25 のときに $\nu = 1.56 \times 10^{-5} \text{ m}^2 / \text{s}$ です。

同じく理科年表から空気密度は大気圧下で 25 のときに $\rho = 1.208 \times 10^{-9} \text{ kgf} \cdot \text{s}^2 / \text{cm}^4$ です。

最後にボールの速度ですが、一体どのくらいなのでしょう。バックラインから相手のバックラインまでストレートに打って 1 秒くらいでしょうか。もちろん実際には放物線を描くのでコートの寸法とは異なりますが、ここではコートの縦の長さをまっすぐに 1 秒で飛ぶものとします。コートの縦の長さはルールブックの第二部・規則 1 から 23.77 m ですからボールの平均速度は $V = 23.77 \text{ m} / \text{s}$ となります。

このときのレイノルズ数は次のようになります。

$$R_e = \frac{d \cdot V}{\nu} = \frac{0.067 \times 23.77}{1.56 \times 10^{-5}} = 1.02 \times 10^5 \quad (12)$$

参考文献 2 によると、物体が球（実は滑らかな球）でレイノルズ数が 1.02×10^5 の場合の抵抗係数は $C_d = 0.5$ です。

これで抗力を計算する準備ができました。抗力は式(2)から次のようになります。なんとボールに作用する重力とほぼ同じ力です。空気をかき分けて飛んでいくのは大変なんですね。

$$F_d = \frac{1}{2} C_d \rho V^2 A = \frac{1}{2} \times 0.5 \times 1.208 \times 10^{-9} \times 2377^2 \times 35.26 = 0.06 \text{ kgf} \quad (13)$$

【なお、テニス・ボールの抵抗係数は表面のメルトンの影響があるため、新しいボールと使い込んだボールでは異なります。このへんの詳細は NASA（米国航空宇宙局）が風洞実験を行っています。興味のある方は参考文献 3 を参照してください】

揚力

まず、ボールのスピンのですが、どのくらいなのでしょう。参考文献4によると普通は毎秒20~30回転、プロで毎秒50回転以上となっています。ここでは、 $N = 25 \text{ rev/s}$ としましょう。

項と同じようにボールの直径は $d = 6.7 \text{ cm}$ 、空気密度は大気圧下で25 のときに $\rho = 1.208 \times 10^{-9} \text{ kgf} \cdot \text{s}^2 / \text{cm}^4$ 、ボールの平均速度は $V_1 = 23.77 \text{ m/s}$ とします。

式(9)から揚力は次のようになります。

$$\begin{aligned}
 F_L &= \pm \frac{1}{8} \pi^2 \rho d^3 V_1 N \\
 &= \pm \frac{1}{8} \pi^2 \times 1.208 \times 10^{-9} \times 6.7^3 \times 2377 \times 25 = \pm 0.0266 \text{ kgf}
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

普通のスピンで揚力はボールに作用する重力の半分ほどになり、意外に大きな力であることが分かります。プロ級では倍のスピンのがかかっており、揚力はスピンの回転速度に比例しますので、プロのボールは大きく変化することが分かりますね。

ボールの速度と回転(スピン)の影響

では、ちょっと遊んでみましょう。

ボールの速度と回転(スピン)の大きさが抗力、揚力にどの程度影響するか見てみましょう。

回転(スピン)を1秒間に20回、30回、40回、50回の4種類、ボール速度が時速18 km~216 km ($5 \text{ m/s} \sim 60 \text{ m/s}$) についての抗力、揚力を求めた結果を図2に示しました。

抗力はボールの速度が速くなるほど大きくなりますが、時速180kmを超えると一端小さくなります。これはレイノルズ数の関係で抗力係数が小さくなるためです(臨界レイノルズ数)。

揚力はボール速度が速いほど、回転(スピン)が強くなっているほど大きくなりますが、ボール速度が時速200 kmで、スピン(回転)が毎秒50回の場合、揚力は0.124 kgf、すなわちボールに作用する重力の2倍ほどになっており、これはかなりの変化球が飛んできそうな力だと思います。

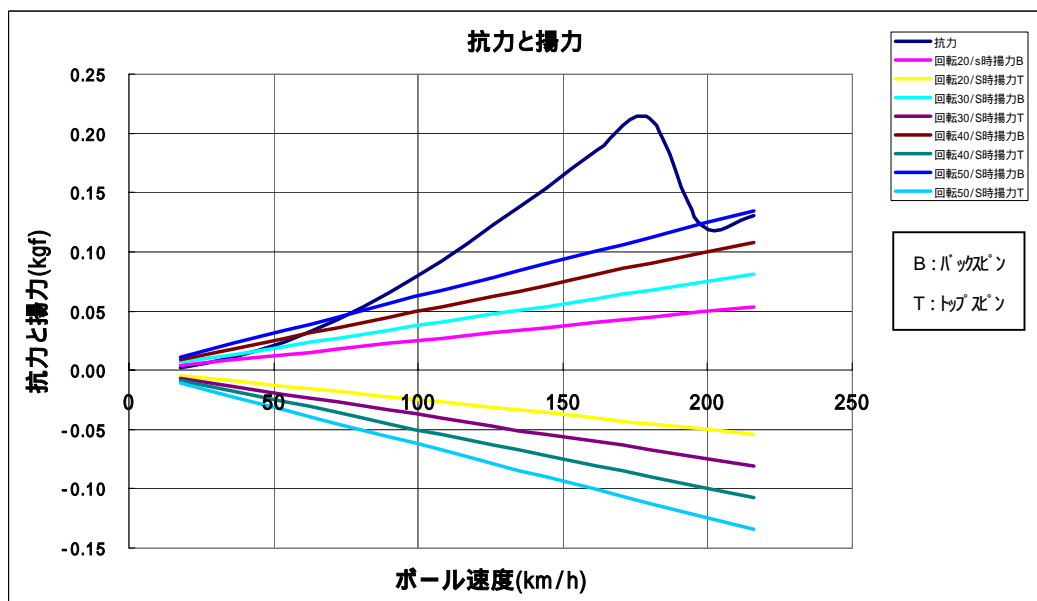


図2 抗力と揚力

【参考文献】

1. Effects of spin on the motion of a ball, <http://carini.physics.indiana.edu/E105/spinning-balls.html>
2. 竹中，浦田共著，水力学例題演習，コロナ社
3. R.D.Mehta, J.M. Pallis, The aerodynamics of a tennis ball, Sports Engineering (2001)4, p177-189
4. 三浦公亮，蝶間林利男著，テニスの科学，光文社

以上